

## Chapitre 2 : Calcul Plastique des Structures

### 2.1 Flexion plastique :

Dans le chapitre précédent, le comportement des fermes a été bien étudié. Cependant, la forme la plus courante des constructions est la structure en portique avec des nœuds capables de transmettre des moments de flexion. Il deviendra clair que les idées déjà développées peuvent être appliquées à de telles structures.

Dans les fermes, les forces appliquées ont été transmises aux appuis au moyen des forces axiales dans les différents membres. Ces forces axiales ont également été décrites comme des forces internes. Dans une structure en portiques, les forces appliquées sont résistées principalement par des forces de cisaillement et des moments de flexion dans les membres (il y'aura peut être aussi des forces axiales, mais leur effet sera normalement secondaire, sauf probablement dans les poteaux).

Avant d'envisager la ruine des portiques, il est nécessaire d'examiner ce qui arrive à un membre quand il fléchit suffisamment pour provoquer l'écoulement de la section la plus sollicitée.

### 2.2 Qu'arrive-t-il à une poutre quand elle fléchit ?

La structure la plus simple qui résiste à la charge par flexion est la poutre simplement appuyée, comme le montre la figure 2.1a. Elle a une portée  $L$  et soumise à une charge verticale  $W$  à mi-travée.

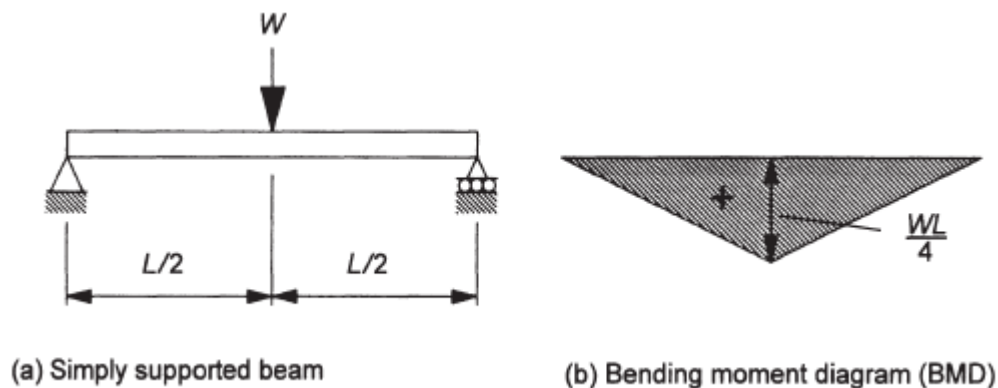


Figure 2.1

La charge est supportée aux appuis par la flexion de la poutre. L'équilibre donne une réaction verticale de  $W/2$  à chaque appui. Le système d'appui assure l'absence de moments fléchissants ou de réactions horizontales au niveau des appuis. Le diagramme du moment fléchissant (BM) de la poutre est représenté sur la figure 2.1b. La poutre est fléchie sur toute sa longueur avec un moment fléchissant maximal de  $WL/4$  sous la charge concentrée. C'est le comportement de la section transversale au point de moment fléchissant « BM » maximum qui doit maintenant être examiné en détail.

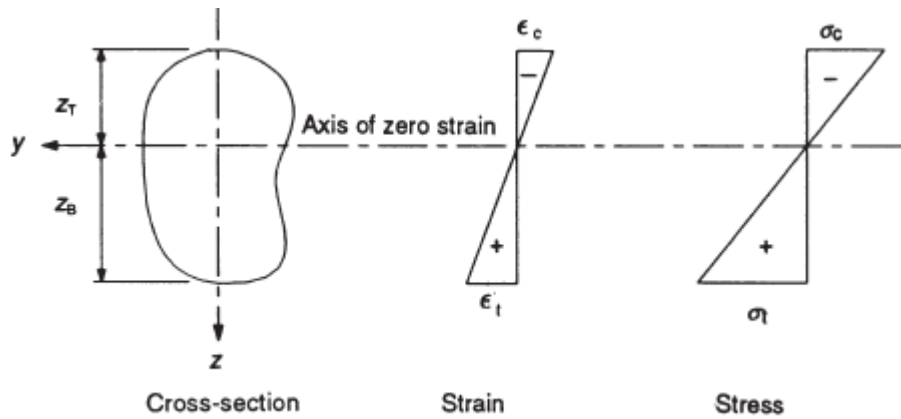


Figure 2.2

La théorie de la flexion des ingénieurs (basée sur le comportement élastique du matériau) donne les informations suivantes sur la section. S'il n'y a pas un écoulement dans le matériau, il existe des relations linéaires de contrainte et de déformation sur toute la hauteur de la section, comme illustrer dans la figure 2.2. Le niveau auquel la contrainte et la déformation sont nulles est l'axe de déformation nulle, que l'on appelle souvent l'axe neutre de la section. La contrainte et la déformation sont proportionnelles à la distance (z) par rapport à cet axe, et pour la flexion, il y'a une compression maximale dans la fibre supérieure et une tension dans la fibre inferieure. La contrainte maximale est donnée par :

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z}$$

Où M = moment fléchissant et Z = module élastique de la section (minimum).

(Notez que pour une section asymétrique, comme dans la figure 2.2, la flexion est par rapport à y, il y a deux valeurs possibles du module élastique de la section :  $Z_T = I_y / z_T$  et  $Z_B = I_y / z_B$  où I est le moment d'inertie de la section autour de l'axe y. Il y aura différentes valeurs de contrainte en haut et en bas).

Il y'aura un comportement élastique jusqu'à ce que la contrainte maximale atteigne la limite d'élasticité. A ce stade, bien sûr, seule la fibre supérieure de la section atteint l'écoulement. Il a été montré dans les essais que la distribution de la déformation reste linéaire sur la hauteur de la section après l'écoulement (et l'hypothèse de la flexion simple des sections planes avant déformation reste planes après déformation est toujours valable). Il est possible de trouver la contrainte à n'importe quelle position à partir du diagramme contrainte-déformation, comme le montrent les figures 2.3 et 2.4.

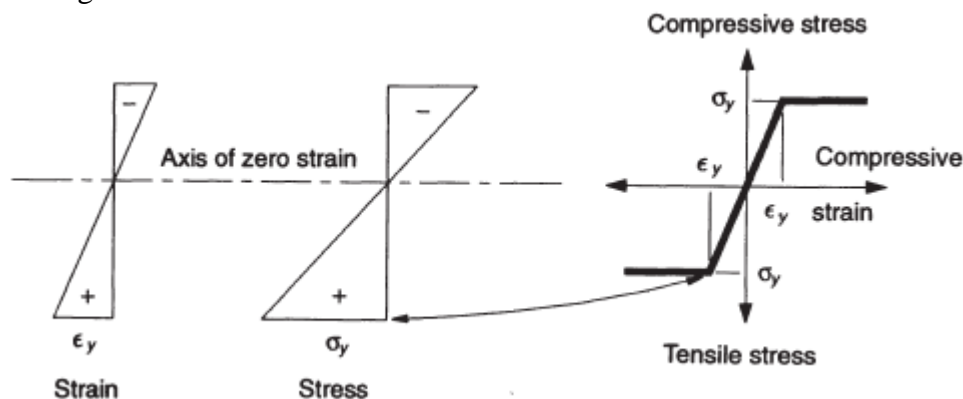


Figure 2.3

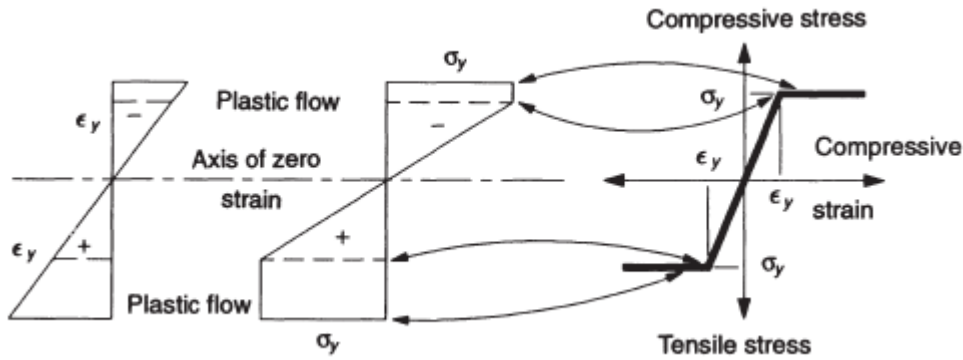


Figure 2.4

Au fur et à mesure que le moment de flexion augmente, l'écoulement se propage vers l'axe de la déformation nulle. La distribution des contraintes montre deux régions constantes où l'écoulement avait lieu (la contrainte atteint la limite d'élasticité, mais la déformation peut augmenter dans le plateau plastique), avec une distribution des contraintes linéaires (élastique). Le résultat final est montré dans la figure 2.5 avec une contrainte constante atteignant effectivement l'axe de déformation nulle. Avec toutes les fibres de la section qui s'écoulaient (en compression au-dessus et en tension au-dessous de l'axe neutre), la section se comporte comme une rotule, car la déformation peut augmenter partout dans la section sans aucun changement de contrainte. Le développement de cette rotule est illustré dans la figure 2.6. La section est devenue une rotule plastique. La rotule plastique est formée à un moment  $M_p$  égal au moment plastique de résistance (généralement appelé moment plastique) de la section, qui est le plus grand moment fléchissant que la section peut supporter.

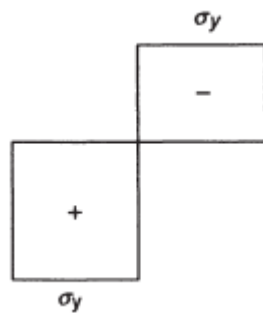


Figure 2.5

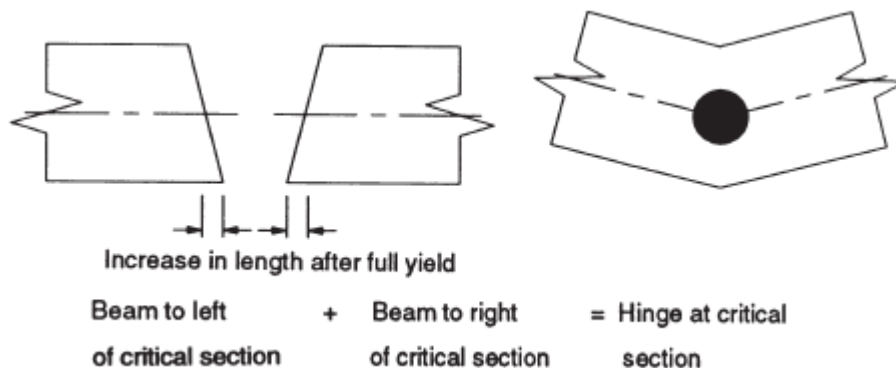


Figure 2.6

Lorsque la rotule plastique se forme dans la poutre simplement appuyée, la ruine a lieu (voir figure 2.7). Ceci est directement comparable au treillis isostatique étudié dans le chapitre 1 où la ruine avait lieu quand le premier membre s'écoulait. La poutre originale est isostatique et s'effondre quand une rotule plastique se forme. Il est important de réaliser que la formation d'une rotule plastique (pas le premier écoulement) dans un élément soumis à la flexion est équivalente à l'écoulement dans un élément chargé axialement. Lorsque la ruine a lieu, la charge et l'appui droit doivent se déplacer. La poutre est devenue un mécanisme plastique. Il est encore facile de trouver la charge de ruine  $W_c$ , en assimilant le moment maximum dû à la charge appliquée au moment plastique de la poutre.

$$\frac{W_c L}{4} = M_p$$

D'où :

$$W_c = \frac{4M_p}{L} \quad (2.1)$$

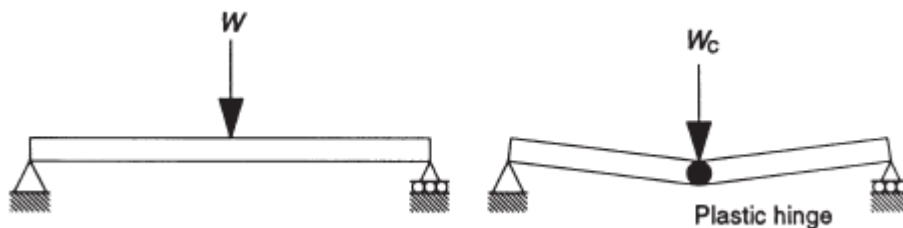


Figure 2.7

## 2.3 Calcul du moment plastique pour les sections en charpentes métalliques

### 2.3.1 Généralités

Une coupe transversale générale est montrée dans la figure 2.8. La répartition des contraintes due à la formation d'une rotule plastique par flexion autour de l'axe y est également représentée. Puisque la rotule a été formée par flexion seulement, l'équilibre horizontal de la section exige que :

$$C = T \quad (2.2)$$

Où C est l'effort de compression équivalent à la limite d'élasticité agissant sur l'aire de la section transversale en compression au-dessus de l'axe de déformation nulle (axe neutre) et T est l'effort de traction équivalent à la limite d'élasticité. Ainsi :

$$(\text{zone de section en compression}) \times \sigma_y = (\text{zone de section en traction}) \times \sigma_y \quad (2.3)$$

Montrant que lorsqu'une rotule plastique se forme, l'axe de la déformation nulle (axe neutre) coupe la section transversale. Cet axe coïncide uniquement avec le centre de gravité de la section lorsque la section est symétrique par rapport à l'axe de déformation nulle.

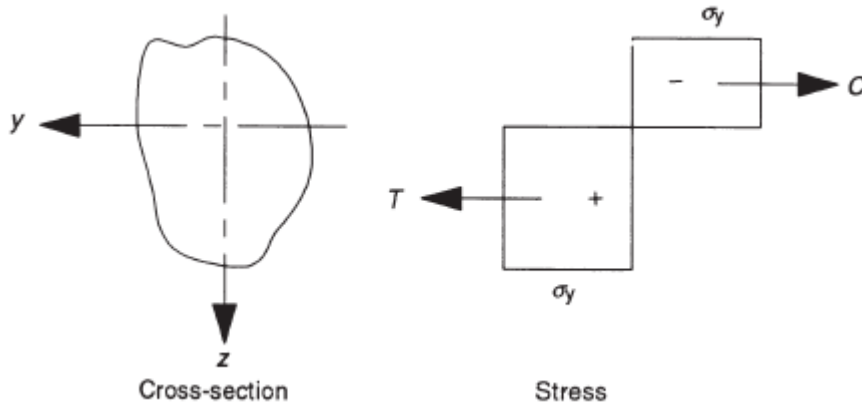


Figure 2.8

### 2.3.2 Section rectangulaire

Dans une section rectangulaire (figure 2.9) fléchiée autour de l'axe des y, l'axe neutre est  $D/2$  du haut de la section, et

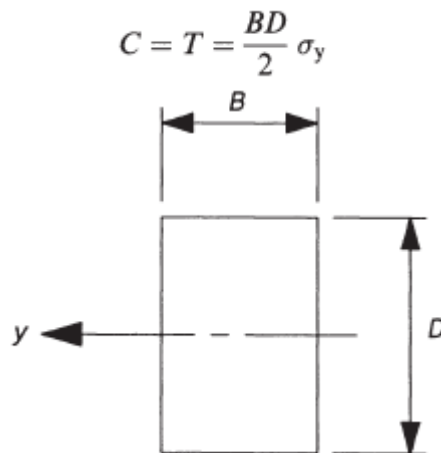


Figure 2.9

Puisque ces forces sont provoquées par un moment fléchissant égal à  $M_p$ , prenant des moments par rapport à l'axe neutre donne :

$$\begin{aligned} M_p &= C \times \frac{D}{4} + T \times \frac{D}{4} \\ &= 2 \times \frac{BD}{2} \sigma_y \times \frac{D}{4} \end{aligned}$$

Donc

$$M_p = \frac{BD^2}{4} \sigma_y$$

et ceci est parfois s'écrit

$$M_p = S\sigma_y$$

Où S est appelé le module plastique de la section (à comparer avec le module élastique de section Z). Le module plastique est une propriété géométrique de la section transversale. Le rapport du module plastique au module élastique de la section est appelé le facteur de forme de la section :

$$\text{Facteur de forme} = \frac{S}{Z}$$

Pour une section rectangulaire  $Z = BD^2/6$  donc :

$$\text{shape factor} = \frac{BD^2}{\frac{BD^2}{6}} = 1.5$$

Les sections plus complexes peuvent être divisées en formes simples, généralement des rectangles pour les sections structurales communes. Le moment plastique peut alors être trouvé en additionnant les moments résultant de la limite d'élasticité sur chacune des formes simples. Ceci est illustré dans les deux prochaines sections.

### 2.3.3 Section en I

C'est probablement la section structurale la plus commune. La forme typique est montrée sur la figure 2.10a. Il est produit en passant une billette d'acier chauffée à travers une série de rouleaux.

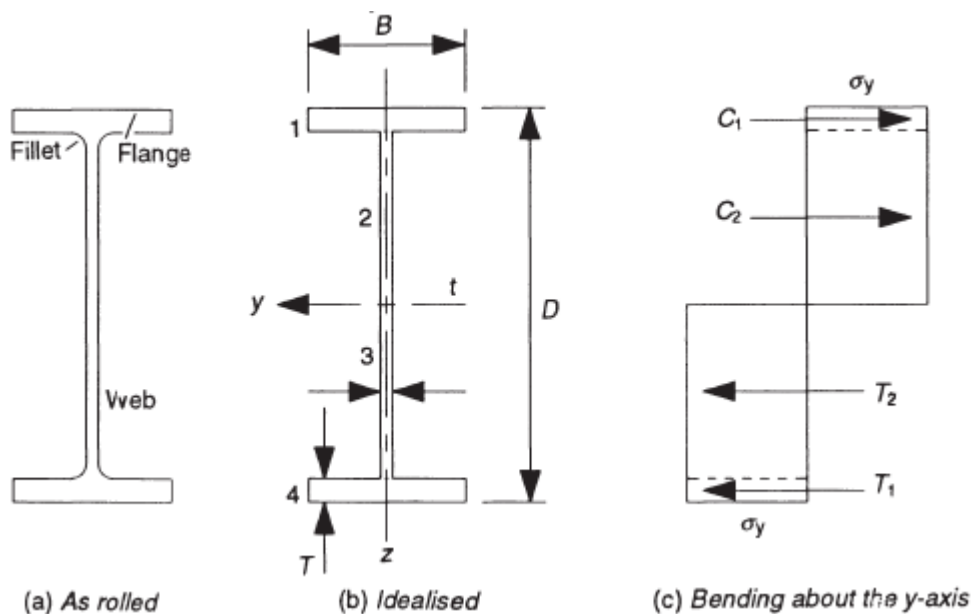


Figure 2.10

Les techniques modernes produisent des sections avec des faces parallèles à la fois à l'âme et aux tables. La section I est symétrique par rapport aux axes y et z. Dans les calculs, les petits filets incurvés entre l'âme et les tables peuvent être ignorés. Cette section idéalisée est représentée sur la figure 2.10b, avec des dimensions utiles et une division pratique en quatre rectangles.

<i>Step</i>	<i>Bending about y-axis</i>	<i>Bending about z-axis</i>
(1) Find axis of zero strain	y-axis (symmetry)	z-axis (symmetry)
(2) Division into simple shapes	Four rectangles as in figure 2.10b	Four rectangles as in figure 2.10b
(3) Moment in each area		
1	$BT\sigma_y \left( \frac{D}{2} - \frac{T}{2} \right)$	$\frac{B^2T}{4} \sigma_y$
2	$\frac{(D-2T)}{2} \times t\sigma_y \times \frac{(D-2T)}{4}$	$\frac{(D-2T)}{2} \frac{t^2}{4} \sigma_y$
3	$\frac{(D-2T)}{2} \times t\sigma_y \times \frac{(D-2T)}{4}$	$\frac{(D-2T)}{2} \frac{t^2}{4} \sigma_y$
4	$BT\sigma_y \left( \frac{D}{2} - \frac{T}{2} \right)$	$\frac{B^2T}{4} \sigma_y$
(4) Plastic moment	$\left( BT(D-T) + \frac{t(D-2T)^2}{4} \right) \sigma_y$	$\left( \frac{B^2T}{2} + \frac{(D-2T)t^2}{4} \right) \sigma_y$
(5) Plastic modulus	$BT(D-T) + \frac{t(D-2T)^2}{4}$	$\frac{B^2T}{2} + \frac{(D-2T)t^2}{4}$

Tableau 2.1

### 2.3.3 Sections asymétriques

Les sections asymétriques ne s'écoulent pas simultanément en haut et en bas de la section. Par conséquent, l'axe neutre se déplace lorsque l'écoulement s'étend à travers la section du centre de gravité avant l'écoulement, jusqu'à l'axe qui coupe la zone transversale.

Pour illustrer ceci, les calculs du module élastique de la section et du module plastique sont montrés dans le tableau 2.2 pour la flexion d'une section en T (figure 2.11a) par rapport à l'axe des ordonnées. La figure 2.11b montre les contraintes dans la section au moment plastique et les trois forces correspondant aux contraintes utilisées dans le calcul du moment plastique.

Les calculs montrent que l'axe de déformation zéro se déplace vers le haut en tant que le flux plastique se propage à travers la section. Le facteur de forme est 1.817, ce qui est typique pour ce type de section.

### 2.4 Pourquoi le moment plastique et la rotule plastique sont idéalisés

Il est possible d'analyser la propagation de l'écoulement à travers une section.

Dans les fermes (treillis) du chapitre 1, cela a été fait en se référant au diagramme contrainte-déformation du matériau. Pour les membres en flexion, cela doit être fait en trouvant la relation entre le moment fléchissant et la courbure pour la section.

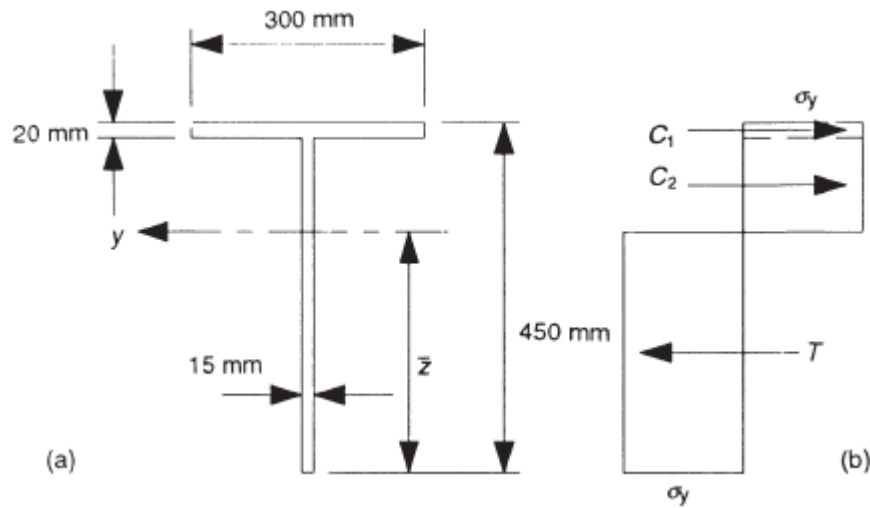


Figure 2.11

<i>Elastic modulus calculation</i>	<i>Plastic modulus calculation</i>
<p>(i) Position of centroid</p> $A = 300 \times 20 + 430 \times 15 = 12450 \text{ mm}^2$ $\sum Az = 6000 \times 440 + 6450 \times 215 = 4026750 \text{ mm}^3$ $\bar{z} = \frac{4026750}{12450} = 323.4 \text{ mm}$ <p>centroid = 323.4 mm from bottom</p> <p>(ii) <math>I = \frac{300 \times 20^3}{12} + 6000 \times 116.6^2 + \frac{15 \times 430^3}{12} + 6450 \times 108.4^2 = 200000 + 81573000 + 99384000 + 75791000 = 256948000 \text{ mm}^4</math></p> <p>The maximum stress is at the edge of the section furthest from the centroid, in this case the bottom of the section. The value of Z given is for that position</p> $Z = \frac{256948000}{323.4} = 794500 \text{ mm}^3$	<p>(i) Position of equal area axis area above axis = area below axis <math>300 \times 20 + (430 - z) \times 15 = 15 \times z</math> <math>6000 + 6450 - 15z = 15z</math> <math>30z = 12450</math> <math>z = \frac{12450}{30} = 415 \text{ mm}</math></p> <p>equal area axis = 415 mm from bottom</p> <p>(ii) <math>M_p = \text{moment of } C_1 + \text{moment of } C_2 + \text{moment of } T</math>  <math>= 300 \times 20\sigma_y \times 25 + 15 \times 15\sigma_y \times \frac{15}{2} + 15 \times 415\sigma_y \times \frac{415}{2}</math>  <math>= \{150000 + 1700 + 1291700\}\sigma_y = 1443400\sigma_y \text{ N mm}</math>  <math>S = 1443400 \text{ mm}^3</math></p> <p>shape factor = <math>\frac{S}{Z} = \frac{1443400}{794500} = 1.817</math></p>

Tableau 2.2



## 2.4 Calcul du moment plastique pour les sections en béton armé

### 2.4.1 Introduction

Il est connu que les contraintes réelles dans un poteau en béton armé peuvent ne pas ressembler aux valeurs calculées sur la base de la théorie élastique. Dans les poutres en béton armé, outre les effets du retrait et du fluage et de l'histoire de chargement, il y a les effets incertains de la fissuration du béton dans la zone tendue ; Comme dans les poteaux, les calculs conventionnels pour les contraintes dans les poutres en béton armé ne donnent pas une indication claire de leurs forces potentielles. Par conséquent, au cours des dernières décennies, il y a eu une évolution graduelle de la conception des calculs de contrainte élastique aux méthodes de résistance ultime [1, 2]. Par exemple, la conception de résistance ultime des poutres a été introduite dans les codes de conception américains et britanniques dans les années 1950, et les procédures de conception à l'état limite dans la pratique britannique actuelle imposent des exigences spécifiques pour les calculs de résistance ultime.

Le calcul à l'état limite ultime de force est fondamentalement un retour aux anciens fondamentaux. Bien que l'intérêt prononcé pour la force ultime des éléments structuraux remonte à seulement 40 ou 50 ans. Ses débuts peuvent être remontés plus loin que les concepts d'élasticité. En Europe, l'origine de la pensée systématique concernant la résistance ultime à la flexion des poutres était due à G. Galilei [3]. Son travail, consacré exclusivement à la force ultime, a été publié dès 1638, 40 ans avant que Robert Hooke fasse la déclaration 'ut tensio sic vis' [4], qui est maintenant connue sous le nom de la loi de Hooke et qui a permis à Navier de développer les théorèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité environ un siècle et demi plus tard.

#### Concept de la théorie générale pour la résistance flexionnelle ultime

À la suite des nombreux travaux de recherche effectués au cours des dernières décennies [1, 5], le comportement des poutres en béton armé aux charges ultimes est maintenant assez bien compris. Les méthodes de conception actuelles dans les codes américains et britanniques sont basées sur la théorie générale décrite ci-dessous. Les hypothèses suivantes sont faites :

- a) Les déformations dans le béton et l'acier sont directement proportionnelles aux distances par rapport à l'axe neutre, où la déformation est nulle.
- b) L'état limite ultime de ruine est atteint lorsque la déformation du béton à la fibre la plus comprimée atteint une valeur spécifiée  $\epsilon_{cu}$ .
- c) A la ruine, la distribution des contraintes de compression du béton est définie par un diagramme contrainte-déformation idéalisé.
- d) La résistance à la traction du béton est négligée.
- e) Les contraintes dans les armatures sont tirées à partir du diagramme contrainte-déformation approprié.